**Відкрита студентська Олімпіада з математики**
**КПІ імені Ігоря Сікорського**
**I тур**
**20 січня 2021 року**
**Категорія B, старші курси**

**1.** Знайти неперервну функцію $f$, яка задовольняє рівність

$$f(x) = x^2 + 2\int_0^1 f(xt)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**2.** Для фіксованого $n > 1$ розглянемо набір дробових чисел вигляду

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

що містять рівно $n$ цифр після коми, цифри $a_i$ можуть приймати значення лише 0 та 1 ($a_n = 1$). Нехай $x_n$ — кількість чисел в такому наборі, а $y_n$ — сума усіх чисел набору. Знайдіть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

**3.** Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \arccos^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

**4.** Обчислити

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \sin(x^2)\cos(y^2)dxdy.$$

**5.** Нехай $f(x) = x^{100} + 1$, $g(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \ldots + 100x + 101$. Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x)\cdot g^{(100)}(x) - f'(x)\cdot g^{(99)}(x) + f''(x)\cdot g^{(98)}(x) - f'''(x)\cdot g^{(97)}(x) + \ldots + f^{(100)}(x)\cdot g(x),$$

де $f^{(n)}$ — похідна порядку $n$. Знайти $h(2020^{2021})$.

**6.** Знайти значення виразу

$$\frac{1^2}{1!\cdot 2020!} + \frac{2^2}{2!\cdot 2019!} + \frac{3^2}{3!\cdot 2018!} + \ldots + \frac{2021^2}{2021!\cdot 0!}.$$